Игровые модели и конфликтные ситуации
Домашняя контрольная работа
3 курс, факультет менеджмента

10 октября 2011 г.

Часть I

Не очень сложные задачи

Задача 1. Шоколадка разделена бороздками на дольки. Игроки ходят по очереди. За ход можно выбрать любую дольку. Выбрав дольку нужно съесть ее и все дольки расположенные выше и правее. Нижняя левая долька отравлена!

Верно ли, что первый игрок выигрывает на прямоугольной шоколадке любых размеров?

Задача 2. В кучке лежит 45 камней. Вася и Петя забирают камни из кучки по очереди. За один ход можно взять два, три или четыре камня. Вася ходит первым. Почетное прозвище «Тамерлан» получает взявший последний камень. Если в кучке остался один камень (ход по правилам сделать невозможно), то игра оканчивается ничьей.

а. Конечны ли множества стратегий игроков?

б. Кто станет Тамерланом при правильной игре?

Задача 3. В кучке лежит 45 камней. Вася и Петя забирают камни из кучки по очереди. За один ход можно взять два, три или четыре камня. Вася ходит первым. Почетное прозвище «Тамерлан» получает не взявший последний камень. Если в кучке остался один камень (ход по правилам сделать невозможно), то игра оканчивается ничьей.

а. Конечны ли множества стратегий игроков?

б. Кто станет Тамерланом при правильной игре?

Задача 4. Злые пираты. Торговый корабль с 100 золотых монет был захвачен 500 абсолютно рациональными пиратами!

У пиратов есть строгая иерархия: капитан, первый помощник капитана, второй помощник и т.д. Пираты делят золото так: сначала капитан предлагает свой вариант дележа, затем пираты голосуют за или против, если дележ одобрен более чем половиной пиратов, то он принимается, если нет, то капитана убивают, и дележ предлагает первый помощник...

Каждый пират хочет остаться в живых и получить побольше золота. При прочих равных пираты жаждут крови - чем больше других выбросят за борт, тем лучше!

Какой дележ будет реализован (предположим, что золотую монету не делят на меньшие части)?

Задача 5. Есть две коробочки. В каждой из них лежит некоторое количество фишек. Игроки ходят по очереди. За один ход игрок выбрасывает содержимое одной из коробочек, и затем делит содержимое другой между двумя коробочками (как минимум одна фишка должна оставаться в каждой коробочке). Проигрывает тот, кто не может сделать ход по правилам. Найдите все выигрышные позиции.

Задача 6. Цзяньшинцзы «Выбирание камней»

Древний Китай. Две кучки камней. Игроки ходят по очереди. За один ход можно забрать либо произвольное число камней из одной кучки, либо одинаковое число камней из обеих. В одной кучке 5, а в другой - 8 камней. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 7. В кучке 135 камней, двое по очереди забирают себе от 1 до 4 камней. Выигрывает тот, кто к концу игры наберет четное число камней. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 8. Есть три рулетки: на первой равновероятно выпадают числа 2, 4 и 9; на второй - 1, 6 и 8; на третьей - 3, 5 и 7. Сначала первый игрок выбирает рулетку себе, затем второй игрок выбирает рулетку себе из двух оставшихся. После этого рулетки, выбранные игроками, запускаются, и случай определяет победителя. Победителем считается тот, чья рулетка покажет большее число. Победитель получает от проигравшего 100 рублей.

а. Нарисуйте дерево игры

б. Найдите совершенное в подыграх равновесие по Нэшу

в. Каким игроком лучше быть в этой игре? Почему?

Задача 9. Счет в банке растет. В момент времени t $(t = 0, 1, ..., T)$ его величина составляет $2t$ рублей. В каждый момент времени Муж и Жена независимо друг от друга выбирают, потребовать ли деньги, или нет. Если требует только один игрок, то он (она) забирает весь вклад. Если требуют оба, то вклад делится поровну. Если не потребовал никто, то начинается следующий период. Если никто так и не потребовал деньги к моменту T, то каждый получает по T рублей. Найдите равновесие, совершенное в подыграх.

Задача 10. На острове живут 99 тигров и одна вкусная волшебная антилопа.

Если тигр съест волшебную антилопу, то он сам превратится в волшебную антилопу. Мясо волшебной антилопы настолько вкусно, что любой тигр готов ради его вкуса на превращение в антилопу. Но ни один тигр не готов полностью расстаться с жизнью ради мяса антилопы. Тигры охотяться только в одиночку.

Что будет происходить на этом острове? (Предположим, что тигры будут охотиться(если будут) на антилопу не одновременно)

А что, если на острое две волшебные антилопы?

Тигры абсолютно рациональны и к тому же сдавали в Кошачьем Университете курс "Игровые модели".

Задача 11. Два садовода-любителя посадили на общем огороде картошку. Оба садовода могут собирать картофель только по воскресеньям, причем каждый из садоводов может съездить на участок ровно один раз. Картофель можно собирать в течение T недель, на (T+1)-ю недель весь несобранный картофель становится несъедобным. В момент времени t ($t = 0, 1, ..., T$) дополнительно созревает $\Delta x_t = 2^{T-t}$ килограмм картофеля. Если садовод приезжает на участок в одиночку, он забирает себе весь созревший картофель. Если садоводы приезжают вдвоем в один день, они делят всю созревшую картошку поровну. Садовод не может заранее узнать, что его "коллега"собрался за картошкой в этой воскресенье, но в ближайший понедельник это становится известно. Когда каждый из садоводов поедет за картошкой? Найдите равновесие(я), совершенное(ые) в подыграх.

Задача 12. Стреляются трое: Афанасий (А), Борис (В) и Станислав (С). Вероятность попадания: А - 50%, В - 80%, С - 100%. Очередность стрельбы В-А-С-В-А-С-В-А-С... Т.е. сначала В стреляет в кого хочет, потом - А, если жив, стреляет в кого хочет, потом - С, если жив, стреляет в кого хочет и т.д. Триэль продолжается до тех пор, пока в живых не останется ровно один. Предположим, что специально стрелять в воздух никто не будет. Как будут вести себя А, В и С, если каждый хочет выиграть? Какие при этом будут вероятности выигрыша для каждого игрока?

Задача 13. Сначала первый игрок выбирает, а не сжечь ли ему 10 рублей...

Второй игрок наблюдает действия первого, а затем игроки играют в одновременную игру:

	a	b
a	$(-100; -100)$	$(100; 0)$
b	$(0; 100)$	$(0; 0)$

а. Найдите все равновесия по Нэшу в одновременной игре;

б. Сформулируйте все стратегии игроков для игры в целом;

в. Найдите все равновесия по Нэшу;

г. Верно ли, что среди равновесий совершенных в подыграх будет равновесие, в котором первый игрок сжигает деньги?

Задача 14. **Торговцы на станции.** На станции Тайга трое местных предпринимателей, Александр, Василий и Семен (A, B, C), промышляют тем, что продают пассажирам, соответственно, пиво, воблу и соленые орешки. Утром приходят сразу два поезда, поэтому каждый спешит поставить свою торговую точку на первой или второй платформе. Если торговец работает на платформе в одиночку, его выручка (в рублях) от продажи товаров пассажирам соответствующего поезда определяется из таблицы:

Платформа	A	B	C
1	80	60	60
2	100	40	40

Если в одном месте продаются и пиво, и закуска, то этих товаров удается продать на 50% больше из-за эффекта дополняемости. Впрочем, если продавцы закуски находятся на одной платформе, то вследствие конкуренции оба выручают вдвое меньше, чем когда они на разных платформах.

1. Формализуйте взаимодействие торговцев как игру в нормальной форме, предполагая, что до установки торговой точки никто из них не может получить информацию о том, где будут другие.

2. Найдите все чистые и смешанные равновесия Нэша в этой игре.

Задача 15. Два продавца пирожков решили разместить свои палатки на пляже. Береговая линия пляжа - отрезок $[0, 1]$. Каждый продавец независимо выбирает место размещения как координату $x_i \in [0, 1]$.

Отдыхающие равномерно распределены по пляжу и всегда покупают пирожки у ближайшего продавца. Если палатки находятся на одном месте, покупатели выбирают любого из продавцов с равной вероятностью.

Постройте модель игры и определите, как будут размещать палатки продавцы.

А что изменится, если продавцов будет трое?

Задача 16. "Дележ пирога". Один режет пирог на две части, другой выбирает себе любую из них. Описать развернутую и нормальную форму. Каков наиболее вероятный исход игры?

Немного модифицируем игру: первый игрок режет пирог на две части и пишет на них “1” и “2”. Другой в это время, отвернувшись, говорит, какую часть ему выдать. Выигрыш игрока - это полученная им доля пирога. Описать развернутую и нормальную форму этой игры. Как Вы думаете, может ли произойти неравный раздел?

Задача 17. **Захват рынка.** Две фирмы A и B производят некоторый товар. В каждый момент времени $t = 1, \ldots, 5$ каждая фирма может произвести единицу товара либо ничего не производить. Затраты на производство равны 3, а цена продажи определяется числом n активных фирм на рынке и составляет $6 - 2n$.

1. Опишите развернутую форму этой игры, стратегии участников и функции выигрыша. Сколько стратегий у каждой фирмы?

2. Те же вопросы, если, однажды выйдя с рынка, фирма уже не может вернуться.

Задача 18. Около среднего.

Три игрока одновременно называют любое число из отрезка $[0;1]$. Выигрыш в сто рублей получает тот, чье число окажется ближе всего к среднему. Если несколько игроков оказались одинаково близки к среднему, то они делят выигрыш поровну.

а. Представьте игру в нормальной форме;

б. Найдите все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях;

в. Найдите все равновесия в смешанных стратегиях, если игроки могут называть только концы отрезка (числа 0 и 1);

г. Найдите все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, если выигрывает тот, кто назовет число, наиболее удаленное от среднего.

Задача 19. Две сверхдержавы играют в одновременную игру и выбирают, нажимать ли красную кнопку запуска стратегических ядерных ракет, или нет. *Тигр: Они доиграются...* Матрица игры имеет вид:

	press	*not*
press	$(-a;-a)$	$(1;-a)$
not	$(-a;1)$	$(0;0)$

а) Найдите все равновесия по Нэшу в этой игре;

б) Допустим, обе сверхдержавы создали системы раннего обнаружения запуска ядерных ракет. Если одна из сверхдержав не запустила ракеты, а другая - запустила, у незапустившей появляется возможность изменить свою решение. Отменить запуск по-прежнему нельзя. Найдите равновесия по Нэшу совершенные в подыграх в измененной игре;

в) Найдите равновесие в случае, если систему раннего обнаружения использует только одна из стран;

Часть II

Сложные задачи

Задача 20. Маша пишет на бумажках два любых различных натуральных числа по своему выбору. Одну бумажку она прячет в левую руку, а другую - в правую. Саша выбирает любую Машину руку. Маша показывает число, написанное на выбранной бумажке. Саша высказывает свою догадку о том, открыл ли он большее из двух чисел или меньшее. Если Саша не угадал, то Маша выиграла.

а) Докажите, что у Саши не существует чистой стратегии, гарантирующей ему выигрыш более чем в 50% случаев;

б) Перед выбором руки и высказыванием догадки Саша может обратиться к потомственной гадалке в пятом поколении Глафире Лукитичне[1].

[1] 500% гарантия, снятие порчи и сглаза без греха и ущерба для здоровья, исправляет некачественную работу шарлатанов

Глафира Лукитична называет наугад (ничего не зная о Маше!) одно из натуральных чисел причем каждое число имеет положительную вероятность быть названным[2]. Другими словами, действия Саши (выбор левой или правой руки и высказываемая версия) могут зависеть от слов гадалки. Какую стратегию Саше следует выбрать, чтобы гарантировать себе (вне зависимости от действий Маши!) вероятность выигрыша строго более 50%?

в) Докажите, что услуги Глафиры Лукитичны эквивалентны использованию некоторой смешанной стратегии

Задача 21. Есть три рулетки, на первой из них равновероятно выпадают числа: 2, 4, 6 и 9; на второй - 1, 5, 6 и 8; на третьей - 3, 4, 5 и 7. Первый игрок выбирает себе рулетку, затем второй игрок выбирает рулетку из двух оставшихся. Затем рулетки одновременно запускаются. Выигрывает, тот, чья рулетка покажет большее число. Если выпадает одинаковое число, то рулетки крутятся снова.

Найдите совершенное в подыграх равновесие по Нэшу

Задача 22. 2 игрока участвуют в аукционе. По очереди они могут повышать последнюю названную цену на натуральное число рублей или отказываться от дальнейшей игры. Игра заканчивается, когда ни один игрок не хочет повышать цену. Приз ценностью 10 рублей получает игрок предложивший наибольшую цену. Деньги платят *два* игрока: игрок назвавший наибольшую цену и игрок, назвавший вторую по величине цену. У каждого игрока в распоряжении только 30 рублей. Для однозначности предположим, что игрок предпочитает просто потерять x рублей, нежели заплатить $(x+b)$ рублей и выиграть b рублей.

Задача 23. Ковбои в количестве n человек выстроились по окружности. Ковбои стреляют по очереди по часовой стрелке друг за другом (сначала стреляет ковбой номер один, затем ближайший живой и т.д.). Ковбой сам выбирает, в кого стрелять. Можно стрелять в воздух. Если ковбою безразлично в кого стрелять, то он стреляет равновероятно в одну из потенциальных жертв. Ковбои стреляют без промаха, но у каждого только один патрон. Каждый ковбой хочет остаться в живых и при прочих равных убить побольше других ковбоев.

а) Кто в кого будет стрелять? Чему будет равна вероятность погибнуть для каждого?

б) Изменится ли ответ, если стрелять в воздух нельзя?

в) Как изменится ответ, если вероятность попадания равна p?

г) Как изменится ответ, если патроны не ограничены?

Задача 24. В игре участвуют двое, ходя по очереди (первый, второй, первый,...). На столе лежит n камней. В свой ход каждый из участников может взять либо столько же камней, сколько было взято его партнером на предыдущем ходу, либо на один больше. На первом ходу можно брать один или два камня. Кто не может продолжать игру по правилам (из-за недостатка камней), тот проиграл.

[2] Ну например, Глафира Лукитична в курсе геометрического или Пуассоновского распределения

- Опишите процесс последовательного определения выигрышных и проигрышных позиций в этой игре. Найдите выигрышные стратегии для малых n.

- Пусть $n = 14$ и ваш ход. Как надо играть?

- Тот же вопрос, если $n = 18$.

Задача 25. Мама испекла пирог, и оставила его в духовке своим двум сыновьям. Потом она ушла в магазин на 3 часа, и наказала: каждые полчаса, начиная с момента закрытия за ней двери, пытаться делить пирог по принципу «один делит, другой одобряет». Если не одобряет, то пирог полчаса остывает в печи, а потом снова. Начинает предлагать старший сын, затем Ч по очереди. За время получаса пирог сохраняет долю α своих замечательных вкусовых свойств с точки зрения старшего брата, и β Ч с точки зрения младшего. Эти параметры общеизвестны. Если мама пришла, и обнаружила неподеленный пирог (в момент прихода мамы уже делить нельзя), то она его сходу съедает сама.

- Найти равновесие, совершенное на подыграх;

- Что, если мама ушла навсегда?

Задача 26. В стране n жителей, каждый из которых получает заработную плату в одну монету. Когда в стране победила демократия, король потерял свою власть, даже был лишен права голоса. Единственное, что он может - так это предлагать перераспределение заработной платы. Зарплата каждого жителя должна выражаться неотрицательным количеством монет, в сумме все зарплаты должны равняться n . Когда король предлагает перераспределение зарплаты, каждый житель, кроме самого короля, может проголосовать за, против или вообще не приходить на голосование. Новое распределение одобряется, если число голосов «за» строго больше числа голосов «против».

Каждый житель эгоистичен, голосует «за», если в новом проекте его зарплата растет, «против», если падает, и не приходит на голосование, если ему предлагается одинаковая зарплата.

Какую зарплату в результате получит хитрый король и сколько голосований ему потребуется?

Задача 27. N человек решают, как провести вечер. Каждый выбирает, к кому из своих N - 1 друзей отправиться в гости, или же остаться дома и самому ждать гостей. Выигрыш игрока, оставшегося дома, равен числу пришедших гостей. Выигрыш каждого гостя на μ меньше ($\mu > 0$). Выигрыш человека, не заставшего хозяина дома, равен $-\mu$. Постройте математическую модель данной ситуации в виде игры в нормальной форме. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях в зависимости от μ при N, равном 3. А при произвольном N?

Задача 28. На необитаемом острове живут два туземца. Их единственное богатство - бананы. У каждого туземца i имеется w_i бананов, $w_1 = 4$.

Каждый туземец может либо съесть банан, либо принести его в жертву местному божку, ответственному за хорошую погоду на острове. Пусть x_i - количество съеденных бананов, g_i - количество бананов, принесенных в жертву. Выигрыш каждого туземца равен $U_i = a_i * \ln x_i + \ln(g_1 + g_2)$, где $a_i = 1$.

a Выпишите максимизационную задачу каждого туземца.

b Найдите функции реакции (наилучший ответ i-го туземца на каждую стратегию другого туземца)

c Найдите равновесие Неша

d Будет ли равновесие Парето-оптимальным? То есть, можно ли выбрать такие x_1, x_2, g_1, g_2, что выигрыш обоих туземцев будет выше, чем в равновесии Нэша?. Сформулируйте задачу максимизации $U_1 + U_2$ и решите ее. В каком случае $g_1 + g_2$ будет выше? Прокомментируйте результат

Задача 29. Муж и жена решают, куда пойти — на футбол (Ф) или на балет (Б). Все осложняется тем обстоятельством, что жена может находиться в хорошем настроении (и тогда стремится быть вместе с мужем), а может и в плохом (и тогда видеть его не может). Короче, вот таблица игры. Строки соответствуют мужу, а столбцы — жене, чей выигрыш зависит от настроения (Х,П):

	Ф	Б
Ф	3; 2,0	1; 1,3
Б	0; 0,2	2; 3,1

Например, если жена и муж идут на футбол, выигрыш мужа всегд 3 единицы, а выигрыш жены - 2 единицы, если она в хорошем настроении и 0 единиц, если в плохом.

Найдите все равновесия, предполагая, что настроения и наступают с равными вероятностями. Незабудьте про смеси.

Что выгоднее для мужа - жена всегда в хорошем настроении, всегда в плохом или переменчивая?

Задача 30.Женская триэль.

Стреляются три дамы: Александра (А), Валерия (В) и Светлана (С). Вероятность попадания: А - 50%, В - 80%, С - 100%. Очередность стрельбы В-А-С-В-А-С-В-А-С... Т.е. сначала В стреляет в кого хочет, потом - А, если жива, стреляет в кого хочет, потом - С, если жива, стреляет в кого хочет и т.д. Триэль продолжается до тех пор, пока в живых не останется ровно одна. Выжившая дама получает приз в размере 3 у.е. Дамы могут стрелять в воздух, если им это выгодно. Если все живые игроки выстрелили в воздух подряд, игра прекращается и приз делится между живыми участницами. Как будут вести себя А, В и С, если каждая хочет выиграть? Какие при этом будут вероятности выигрыша для каждого игрока?